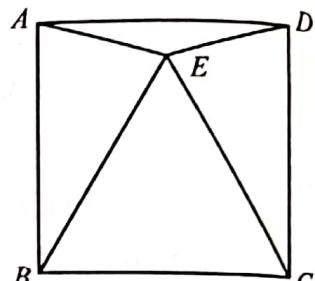


习题 1.7



知识技能

1. 对角线长为 2 cm 的正方形，边长是多少？
2. 如图，四边形 ABCD 是正方形， $\triangle CBE$ 是等边三角形，求 $\angle AEB$ 的度数。



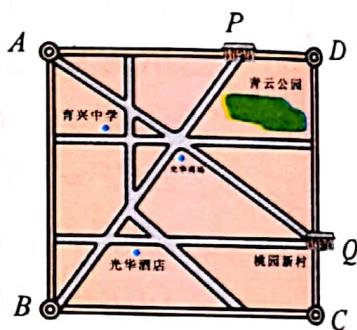
(第 2 题)

3. 如图，A, B, C, D 四家工厂分别坐落在正方形城镇的四个角上。仓库 P 和 Q 分别位于 AD 和 DC 上，且 $PD = QC$. 证明两条直路 $BP = AQ$ 且 $BP \perp AQ$.



问题解决

- ※4. 在一个正方形的花坛上，欲修建两条直的小路，使得两条直的小路将花坛分成大小、形状完全相同的四部分（不考虑道路的宽度）。你有几种方法？（至少说出三种）



(第 3 题)

如图 1-20，将一张长方形纸对折两次，然后剪下一个角，打开。怎样剪才能剪出一个正方形？



议一议

满足什么条件的矩形是正方形？满足什么条件的菱形是正方形？请证明你的结论，并与同伴交流。

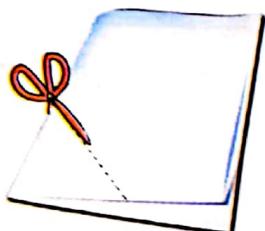


图1-20

- 定理** 有一组邻边相等的矩形是正方形。
定理 对角线互相垂直的矩形是正方形。
定理 有一个角是直角的菱形是正方形。
定理 对角线相等的菱形是正方形。

例2 已知：如图 1-21，在矩形 $ABCD$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ ， CE 平分 $\angle DCB$ ， $BF \parallel CE$ ， $CF \parallel BE$. 求证：四边形 $BECF$ 是正方形.

证明： $\because BF \parallel CE$, $CF \parallel BE$,

\therefore 四边形 $BECF$ 是平行四边形.

\because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $\angle DCB = 90^\circ$.

又 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$, CE 平分 $\angle DCB$,

$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$, $\angle ECB = \frac{1}{2} \angle DCB = 45^\circ$.

$\therefore \angle EBC = \angle ECB$.

$\therefore EB = EC$.

$\therefore \square BECF$ 是菱形 (菱形的定义).

在 $\triangle EBC$ 中,

$\because \angle EBC = 45^\circ$, $\angle ECB = 45^\circ$,

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$.

\therefore 菱形 $BECF$ 是正方形 (有一个角是直角的菱形是正方形).

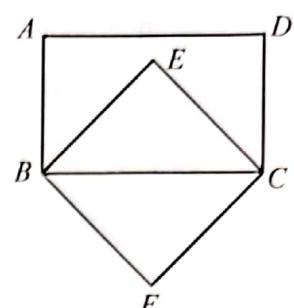


图 1-21



做一做

我们知道，任意画一个四边形，以四边的中点为顶点可以组成一个平行四边形. 那么，任意画一个正方形（如图1-22），以四边的中点为顶点可以组成一个怎样的图形呢？先猜一猜，再证明.

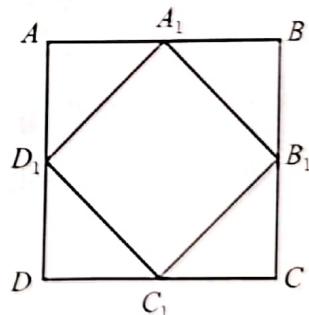


图 1-22

议一议

(1) 以菱形或矩形各边的中点为顶点可以组成一个什么图形？先猜一猜，再证明. 如果以平行四边形各边的中点为顶点呢？

(2) 以四边形各边中点为顶点所组成的新四边形的形状与哪些线段有关？有怎样的关系？

随堂练习

证明。

- (1) 对角线互相垂直的矩形是正方形;
(2) 有一个角是直角的菱形是正方形.



读一读

四边形的对称性

我们知道，一般的四边形既不一定是轴对称图形，也不一定是中心对称图形；平行四边形都是中心对称图形，却不一定 是轴对称图形；所有的菱形和矩形既是中心对称图形，又是轴对称图形，而且它们至少都有两条对称轴。请你想一想、画一画，什么情况下菱形和矩形只有两条对称轴？什么情况下它们有两条以上的对称轴？

通过想象或实际画图，可以发现，当菱形有一个角为直角时，它的对称轴的数量就增加了；当矩形有一组邻边相等时，它的对称轴的数量也增加了。换句话说，当菱形或矩形成为正方形时，它的对称轴就不止两条了。由此我们看到，当图形从一般情况向特殊情况变化时，它的对称性也随之发生了变化。

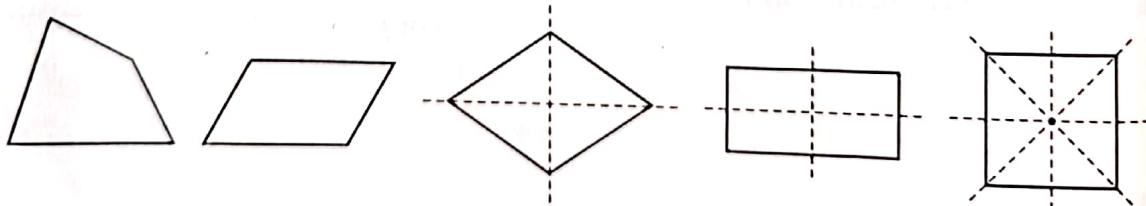


图1-23

此外，我们还知道，如果把一个图形绕着某一点旋转一定角度（小于 360° ）后，能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做旋转对称图形。请你想一想、试一试，平行四边形是旋转对称图形吗？菱形呢？矩形呢？正方形呢？

3

用公式法求解一元二次方程

我们发现，利用配方法解一元二次方程的基本步骤是相同的。因此，如果能用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，得到根的一般表达式，那么再解一元二次方程时，就会方便简捷得多。

你能用配方法解方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 吗？请你试一试，并与同伴交流。

事实上，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，因为二次项系数 $a \neq 0$ ，所以方程两边同除以 a ，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

配方，得

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0. \end{aligned}$$

移项，得

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

因为 $a \neq 0$ ，所以 $4a^2 > 0$ 。当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时， $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 是一个非负数，此时两边开平方，得

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

即

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

这就是说，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，它的根是：



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



上面这个式子称为一元二次方程的求根公式. 用求根公式解一元二次方程的方法称为公式法 (solving by formula).

例 解方程:

$$(1) x^2 - 7x - 18 = 0; \quad (2) 4x^2 + 1 = 4x.$$

解: (1) 这里 $a = 1$, $b = -7$, $c = -18$.

$$\because b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 121 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2 \times 1} = \frac{7 \pm 11}{2},$$

即 $x_1 = 9$, $x_2 = -2$.

(2) 将原方程化为一般形式, 得

$$4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

这里 $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$.

$$\therefore b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{-(-4) \pm 0}{2 \times 4} = \frac{1}{2},$$

即 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.



议一议

(1) 你能解一元二次方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 吗? 你是怎么想的?

(2) 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 它的根的情况是怎样的? 与同伴交流.



对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$),

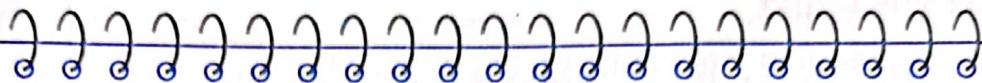
当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根;

当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根;

当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根.

由此可知，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的情况可由 $b^2 - 4ac$ 来判定。我们把 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式，通常用希腊字母“ Δ ”①来表示。

随堂练习



1. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $2x^2 + 5 = 7x$; (2) $4x(x - 1) + 3 = 0$; (3) $4(y^2 + 0.09) = 2.4y$.

2. 用公式法解下列方程：

(1) $2x^2 - 9x + 8 = 0$; (2) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;
(3) $16x^2 + 8x = 3$. (4) $x(x - 3) + 5 = 0$.

3. 一个直角三角形三条边的长为三个连续偶数，求这个三角形的三条边长。

习题 2.5



知识技能

1. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $5x^2 + x = 7$; (2) $25x^2 + 20x + 4 = 0$;
(3) $(x + 1)(4x + 1) = 2x$.

2. 用公式法解下列方程：

(1) $2x^2 - 4x - 1 = 0$; (2) $5x + 2 = 3x^2$;
(3) $(x - 2)(3x - 5) = 1$; (4) $0.2x^2 + 5 = \frac{3}{2}x$.



问题解决

3. 《九章算术》“勾股”章有一题：“今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈。问户高、广各几何。”

大意是说：已知长方形门的高比宽多 6 尺 8 寸，门的对角线长 1 丈，那么门的高和宽各是多少？②

4. 长方体木箱的高是 8 dm，长比宽多 5 dm，体积是 528 dm^3 ，求这个木箱的长和宽。

① 希腊字母“ Δ ”读作 delta.

② “尺”“寸”“丈”都是我国传统的长度单位，其中 1 丈 = 10 尺，1 尺 = 10 寸。

6

利用相似三角形测高

活动课题：利用相似三角形的有关知识测量旗杆（或路灯杆）的高度.

活动方式：分组活动、全班交流研讨.

活动工具：小镜子、标杆、皮尺等测量工具.

方法1：利用阳光下的影子.

如图4-26，每个小组选一名同学直立于旗杆影子的顶端处，其他人分为两部分，一部分同学测量该同学的影长，另一部分同学测量同一时刻旗杆的影长.

根据测量数据，你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由.



图 4-26

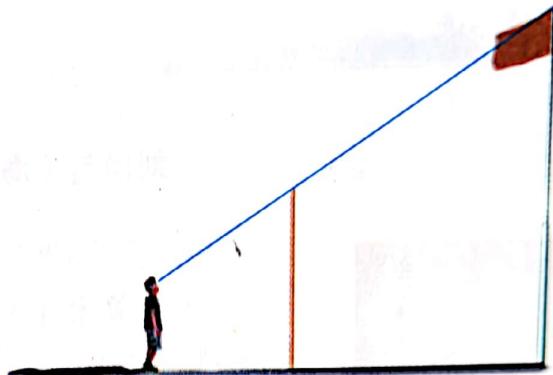


图 4-27

方法2：利用标杆.

如图4-27，每个小组选一名同学作为观测者，在观测者与旗杆之间的地面上直立一根高度适当的标杆. 观测者适当调整自己所处的位置，使旗杆的顶端、标杆的顶端与自己的眼睛恰好在一条直线上，这时其他同学立即测出观测者的标杆的顶端与自己的眼睛恰好在一条直线上，这时其他同学立即测出观测者的脚到旗杆底端的距离，以及观测者的脚到标杆底端的距离，然后测出标杆的高度.

根据测量数据，你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由.

方法3：利用镜子的反射.

如图4-28，每个小组选一名同学作为观测者，在观测者与旗杆之间的地面上平放一面镜子，在镜子上做一个标记，观测者看着镜子来回移动，直至看到旗杆顶端在镜子中的像与镜子上的标记重合.

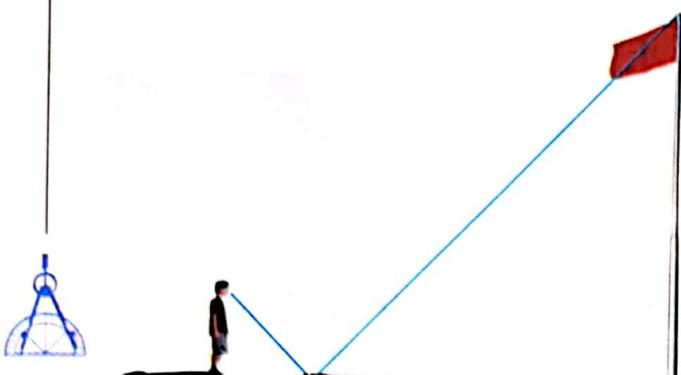


图 4-28

测量所需的数据，根据所测的结果你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由。



想一想

你还有哪些测量旗杆高度的方法？



议一议

上述几种测量方法各有哪些优缺点？



读一读

刘徽与《海岛算经》



刘徽

刘徽，公元3世纪人，是中国历史上最杰出的数学家之一。《九章算术注》和《海岛算经》是他留给后世最宝贵的数学遗产。

《海岛算经》最早附于《九章算术注》之后，唐初开始单行。刘徽在该书中精心选编了九个测量问题，都是利用测量的方法来计算高、深、广、远问题的。其中第一个问题是测算海岛的高、远问题，因此得名。《海岛算经》是中国最早的一部测量数学专著，

也是中国古代高度发达的地图学的数学基础。

《海岛算经》第一个问题的大意是：如图4-29，要测量海岛上一座山峰 A 的高度 AH ，立两根高3丈的标杆 BC 和 DE ，两杆之间的距离 $BD = 1000$ 步， D, B, H 成一线；

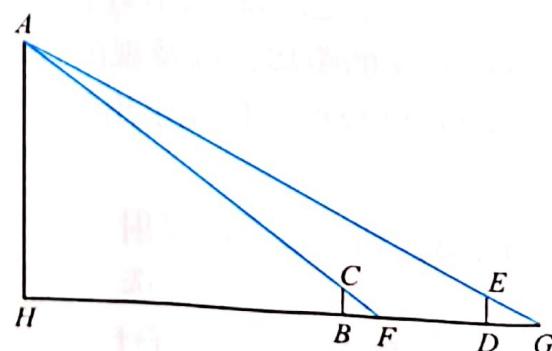


图 4-29

初中数学试教题目

1. 教材：北京师范大学出版社九年级上册，第一章特殊平行四边形，第 22-24 页

课题：《正方形的性质与判定》（第二课时 正方形的判定）

2. 教材：北京师范大学出版社九年级上册，第二章一元二次方程，第 41-43 页

课题：3. 《用公式法求解一元二次方程》（第一课时）

3. 教材：北京师范大学出版社九年级上册，第四章图形的相似，第 103-104 页

课题：6. 《利用相似三角形测高》（第一课时）

要 求：

1. 设计一课时内容，完成教学展示时间为 10 分钟。
2. 用普通话教学；
3. 突出学科核心素养；
4. 合理制定教学目标，主题明确，条例清楚、突出重点、突破难点；
5. 合理设计教学方案；
6. 注重教法和学法，合理展示教学基本功，教态和应变能力；
7. 有一定的教学辅助手段；
8. 注重学生学习兴趣和能力的培养。