教师岗位 6

专业:数学（一级学科）

教参	上海交通大学出版社 2017 年 8 月第 1 版
试教内容	“十三五”职业教育国家规划教材 《高职应用数学》 第 2 章　 2.4.3 初等函数的连续性 （页码：P55-56）

2.4.3 初等函数的连续性

定理 1 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则它们的和、差、积、商（分母不等于 0）也都在点 x_0 处连续.

定理 2 若函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

上述定理也可表述为：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right]$.

这说明，在求连续函数的复合函数的极限时，极限符号可与函数符号交换次序.

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-2x+5}$.

解 因为 $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2-2x+5$ 复合而成的，所以

$$\lim_{x\to1}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{\lim_{x\to1}(x^2-2x+5)}=2.$$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a \mathrm{e}=\dfrac{1}{\ln a}$.

由连续和极限的定义容易证明，基本初等函数在其定义域内都是连续的．由于初等函数是由基本初等函数经有限次四则运算和有限次的函数复合构成的，因此我们可得到如下一个非常有用的结论．

定理 3 一切初等函数在其定义区间内都是连续的．

提示

（1）初等函数的连续区间就是初等函数的定义区间．

（2）求初等函数在其定义域内某点处的极限时，只需求出函数在该点的函数值即可．

例 5 求函数 $y=\sqrt{x+4}-\dfrac{1}{x^2-1}$ 的连续区间．

解 因为函数 $y=\sqrt{x+4}-\dfrac{1}{x^2-1}$ 为初等函数，其定义域为 $[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，所以它的连续区间为 $[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$．

例 6 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+\ln(4-3x)}{\arctan x}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+1}{3x^2+\cos x^2+2}$．

解 （1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+\ln(4-3x)}{\arctan x}=\dfrac{1^2+\ln(4-3\times1)}{\arctan 1}=\dfrac{4}{\pi}$．

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+1}{3x^2+\cos x^2+2}=\dfrac{0^2+1}{3\times0^2+\cos0^2+2}=\dfrac{1}{3}$．