2. 正弦定理

探究

余弦定理及其推论分别给出了已知两边及其夹角、已知三边直接解三角形的公式. 如果已知两角和一边，是否也有相应的直接解三角形的公式呢？

在初中，我们得到了三角形中等边对等角的结论. 实际上，三角形中还有大边对大角，小边对小角的边角关系. 从量化的角度看，可以将这个边、角关系转化为：

在$\triangle ABC$中，设A的对边为a，B的对边为b，求A，B，a，b之间的定量关系.

如果得出了这个定量关系，那么就可以直接解决“在$\triangle ABC$中，已知A，B，a，求b”的问题.

我们从熟悉的直角三角形的边、角关系的分析入手. 根据锐角三角函数，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中（如图6.4-9），有

$$\sin A=\frac{a}{c},$$

$$\sin B=\frac{b}{c},$$

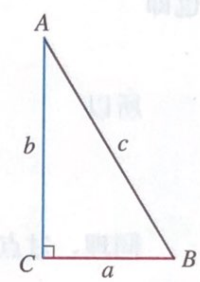


图 6.4-9

显然，上述两个关系式在一般三角形中不成立. 观察发现，它们有一个共同元素c，利用它把两个式子联系起来，可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c.$$

又因为$\sin C=\sin 90^\circ=1$，所以上式可以写成边与它的对角的正弦的比相等的形式，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

对于锐角三角形和钝角三角形，以上关系式是否仍然成立？

因为涉及三角形的边、角关系，所以仍然采用向量方法来研究.

我们希望获得$\triangle ABC$中的边a，b，c与它们所对角A，B，C的正弦之间的关系式. 在向量运算中，两个向量的数量积与长度、角度有关，这就启示我们可以用向量的数量积来探究.

思考

向量的数量积运算中出现了角的余弦，而我们需要的是角的正弦. 如何实现转化？

由诱导公式$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$可知，我们可以通过构造角之间的互余关系，把边与角的余弦关系转化为正弦关系.

下面先研究锐角三角形的情形.

如图 6.4-10，在锐角$\triangle ABC$中，过点A作与$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量$\boldsymbol{j}$，则$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-A$，$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{CB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-C$.

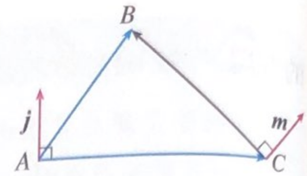


图 6.4-10

因为$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，所以

$$\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

由分配律，得

$$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB},$$

即

$$|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{2}+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CB}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right),$$

也即

$$a\sin C=c\sin A.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理，过点C作与$\overrightarrow{CB}$垂直的单位向量$\boldsymbol{m}$，可得

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

当$\triangle ABC$是钝角三角形时，不妨设A为钝角（如图 6.4-11）. 过点A作与$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量$\boldsymbol{j}$，则$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角为$A-\frac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{CB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-C$. 仿照上述方法，同样可得

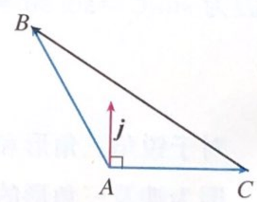


图 6.4-11

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

综上，我们得到下面的定理：

正弦定理（sine theorem）**在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

这个公式表达形式的统一性、对称性，不仅使结果更和谐优美，而且更突显了三角形边角关系的本质.

正弦定理给出了任意三角形中三条边与它们各自所对的角的正弦之间的一个定量关系. 利用正弦定理，不仅可以解决“已知两角和一边，解三角形”的问题，还可以解决“已

知两边和其中一边的对角，解三角形”的问题.

以上我们利用向量方法获得了正弦定理、余弦定理. 事实上，探索和证明这两个定理的方法很多，有些方法甚至比上述方法更加简洁. 你还能想到其他方法吗？

例 7 在$\triangle ABC$中，已知$A=15^\circ$，$B=45^\circ$，$c=3+\sqrt{3}$，解这个三角形.

解： 由三角形内角和定理，得

$$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(15^\circ+45^\circ)=120^\circ.$$

由正弦定理，得

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{(3+\sqrt{3})\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ}=\frac{(3+\sqrt{3})\sin(45^\circ-30^\circ)}{\sin 120^\circ}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{3})(\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ)}{\sin 120^\circ}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2},$$

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{(3+\sqrt{3})\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

例 8 在$\triangle ABC$中，已知$B=30^\circ$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$，解这个三角形.

分析： 这是已知三角形两边及其一边的对角求解三角形的问题，可以利用正弦定理.

解： 由正弦定理，得

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sin 30^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 $c>b$，$B=30^\circ$，

所以 $30^\circ<C<180^\circ$.

于是 $C=45^\circ$，或$C=135^\circ$.

为什么角 C 有两个值？

(1) 当$C=45^\circ$时，$A=105^\circ$.

此时

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{2}\sin(60^\circ+45^\circ)}{\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ)}{\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+1.$$

（2）当 $C=135°$ 时，$A=15°$.

此时

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 15°}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{2}\sin\ (45°-30°)}{\sin 30°}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°)}{\sin 30°}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-1.$$

由三角函数的性质可知，在区间（0，π）内，余弦函数单调递减，所以利用余弦定理求角，只有一解；正弦函数在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调递增，在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$内单调递减，所以利用正弦定理求角，可能有两解.

练习

1. 完成下列解三角形问题（角度精确到1°，边长精确到1 cm）：

（1）在△ABC 中，已知 $A=60°$，$B=45°$，$c=20$ cm；

（2）在△ABC 中，已知 $a=20$ cm，$b=11$ cm，$B=30°$.

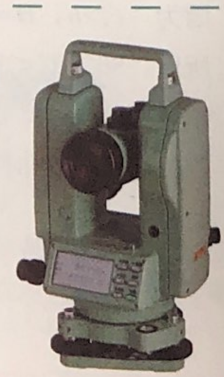
2.（1）在△ABC 中，已知 $a=2$，$c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$A=120°$，求 b 和 C；

（2）在△ABC 中，已知 $b=2$，$A=45°$，$C=75°$，求 c.

3. 在△ABC 中，已知 $\cos A=\frac{4}{5}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，求 a，c.

3. 余弦定理、正弦定理应用举例

在实践中，我们经常会遇到测量距离、高度、角度等实际问题. 解决这类问题，通常需要借助经纬仪以及卷尺等测量角和距离的工具进行测量.



经纬仪

具体测量时，我们常常遇到“不能到达”的困难，这就需要设计恰当的测量方案. 下面我们通过几道例题来说明这种情况. 需要注意的是，题中为什么要给出这些已知条件，而不是其他的条

设截得棱台的棱锥的体积为 V，去掉的棱锥的体积为 V'、高为 h'，则 $PO'=h'$. 于是

$$V'=\frac{1}{3}S'h',\ V=\frac{1}{3}S(h'+h).$$

所以棱台的体积

$$V_{棱台}=V-V'=\frac{1}{3}S(h'+h)-\frac{1}{3}S'h'=\frac{1}{3}[Sh+(S-S')h']. \qquad ①$$

由棱台的上、下底面平行，可以证明棱台的上、下底面相似❶，并且

$$\frac{S'}{S}=\frac{h'^2}{(h'+h)^2},$$

所以

$$h'=\frac{\sqrt{S'}\,h}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}.$$

❶请你自己证明这个结论.

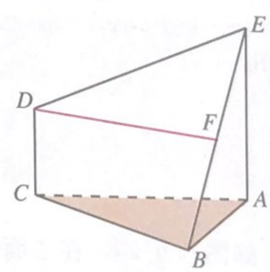
代入①，得

$$V_{棱台}=\frac{1}{3}h\left[S+(S-S')\ \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}h(S'+\sqrt{S'S}+S).$$

练习

1. 已知直线 a，b 和平面 α，且 $a\perp b$，$a\perp\alpha$，则 b 与 α 的位置关系是________.
2. 已知 A，B 两点在平面 α 的同侧，且它们与 α 的距离相等，求证：直线 $AB/\!/\alpha$.
3. 如图，EA 和 DC 都垂直于平面 ABC，且 $EA=2DC$，F 是 EB 的中点，求证：$DF/\!/$平面 ABC.
4. 求证：垂直于同一条直线的两个平面互相平行.（提示：过这条直线作平面与这两个平面相交，则它们的交线平行.）



（第 3 题）

8.6.3 平面与平面垂直

像研究直线与平面垂直一样，我们首先应给出平面与平面垂直的定义. 那么，该如何定义呢？不妨回顾一下直线与平面垂直、直线与直线垂直的定义过程.

在定义直线与平面垂直时，我们利用了直线与直线的垂直. 所以，直线与直线垂直是研究直线、平面垂直问题的基础.

在平面几何中，我们先定义了角的概念，利用角刻画两条相交直线的位置关系，进而研究直线与直线互相垂直这种特殊情况. 类似地，我们需要先引进二面角的概念，用以刻

画两个相交平面的位置关系，进而研究两个平面互相垂直.

如图 8.6-21，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**（dihedral angle）. 这条直线叫做**二面角的棱**，这两个半平面叫做**二面角的面**. 棱为 AB，面分别为 α，β 的二面角记作二面角 α-AB-β. 有时为了方便，也可在 α，β 内（棱以外的半平面部分）分别取点 P，Q，将这个二面角记作二面角 P-AB-Q. 如果棱记作 l，那么这个二面角记作二面角 α-l-β 或二面角 P-l-Q.

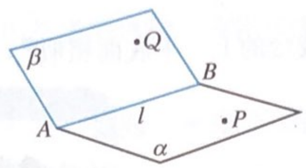


图 8.6-21

平面内的一条直线把平面分成两部分，这两部分通常称为半平面.

思考

如图 8.6-22，在日常生活中，我们常说“把门开大一些”，是指哪个角大一些？受此启发，你认为应该怎样刻画二面角的大小呢？

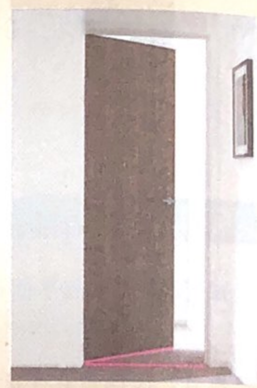


图 8.6-22

如图 8.6-23，在二面角 α-l-β 的棱 l 上任取一点 O，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做**二面角的平面角**.

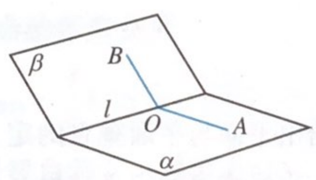


图 8.6-23

?

$\angle AOB$ 的大小与点 O 在 l 上的位置有关吗？为什么？

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度. 平面角是直角的二面角叫做直二面角. 二面角的平面角 α 的取值范围是 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$.

观察

教室相邻的两个墙面与地面可以构成几个二面角？分别指出构成这些二面角的面、棱、平面角及其度数.

教室里的墙面所在平面与地面所在平面相交，它们所成的二面角是直二面角，我们常说墙面直立于地面上.

一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这**两个平面互相垂直**. 平面 α 与 β 垂直，记作 $\alpha\perp\beta$.

如图 8.6-24，画两个互相垂直的平面时，通常把表示平面的两个平行四边形的一组边画成垂直.

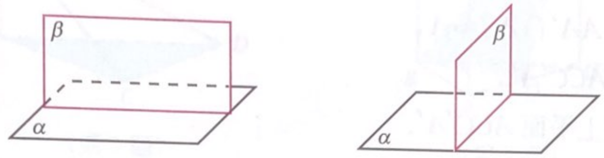


图 8.6-24

在明确了两个平面互相垂直的定义的基础上，我们研究两个平面垂直的判定和性质. 先研究平面与平面垂直的判定.

观察

如图 8.6-25，建筑工人在砌墙时，常用铅锤来检测所砌的墙面与地面是否垂直. 如果系有铅锤的细线紧贴墙面，工人师傅就认为墙面垂直于地面，否则他就认为墙面不垂直于地面. 这种方法说明了什么道理？

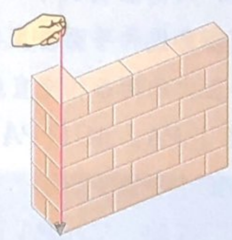


图 8.6-25

这种方法告诉我们，如果墙面经过地面的垂线，那么墙面与地面垂直. 类似的结论也可以在长方体中发现. 如图8.6-26，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，平面 $ABB'A'$ 经过平面 $ABCD$ 的一条垂线 AA'，此时，平面 $ABB'A'$ 垂直于平面 $ABCD$.

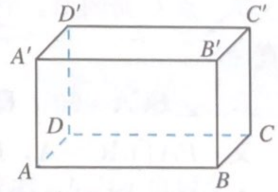


图 8.6-26

一般地，我们有下面判定两个平面互相垂直的定理：

定理　如果一个平面过另一个平面的垂线，那么这两个平面垂直.

它可以用符号表示为：

$$a \subset \alpha,\ a \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

这个定理说明，可以由直线与平面垂直证明平面与平面垂直.

例 7 如图 8.6-27 所示，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求证：平面 $A'BD \perp$ 平面 $ACC'A'$.

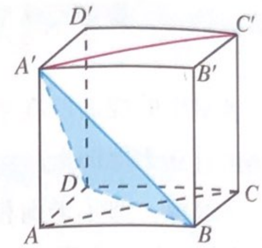


图 8.6-27

分析：要证平面 $A'BD \perp$ 平面 $ACC'A'$，根据两个平面垂直的判定定理，只需证明平面 $A'BD$ 经过平面 $ACC'A'$ 的一条垂线即可. 这需要利用 AC，BD 是正方形 $ABCD$ 的对角线.

证明：∵ $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 是正方体，

∴ $AA' \perp$ 平面 $ABCD$，

∴ $AA' \perp BD$.

又 $BD \perp AC$，$AA' \cap AC = A$，

∴ $BD \perp$ 平面 $ACC'A'$，

∴ 平面 $A'BD \perp$ 平面 $ACC'A'$.

例 8 如图 8.6-28，AB 是 ⊙O 的直径，PA 垂直于 ⊙O 所在的平面，C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点. 求证：平面 $PAC \perp$ 平面 PBC.

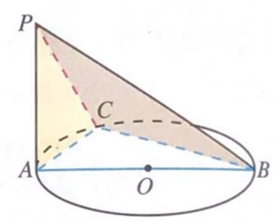


图 8.6-28

分析：要证明两个平面垂直，根据两个平面垂直的判定定理，只需证明其中一个平面内的一条直线垂直于另一个平面. 而由直线和平面垂直的判定定理，还需证明这条直线和另一个平面内的两条相交直线垂直. 在本题中，由题意可知 $BC \perp AC$，$BC \perp PA$，$AC \cap PA = A$，从而 $BC \perp$ 平面 PAC，进而平面 $PAC \perp$ 平面 PBC.

证明：∵ $PA \perp$ 平面 ABC，

$BC \subset$ 平面 ABC，

∴ $PA \perp BC$.

∵ 点 C 是圆周上不同于 A，B 的任意一点，AB 是 ⊙O 的直径，

∴ $\angle BCA = 90^\circ$，即 $BC \perp AC$.

又 $PA \cap AC = A$，$PA \subset$ 平面 PAC，$AC \subset$ 平面 PAC，

∴ $BC \perp$ 平面 PAC.

又 $BC \subset$ 平面 PBC，

∴ 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC.

练习

1. 为了合理调配电力资源，某市欲了解全市 50 000 户居民的日用电量. 若通过简单随机抽样从中抽取了 300 户进行调查，得到其日用电量的平均数为 5.5 kW·h，则可以推测全市居民用户日用电量的平均数（　　）.

(A) 一定为 5.5 kW·h　　(B) 高于 5.5 kW·h

(C) 低于 5.5 kW·h　　(D) 约为 5.5 kW·h

2. 在学生身高的调查中，小明和小华分别独立进行了简单随机抽样调查. 小明调查的样本平均数为 166.4，样本量为 100；小华调查的样本平均数为 164.7，样本量为 200. 你更愿意把哪个值作为总体平均数的估计？是不是你选的值一定比另一个更接近总体平均数？说说你的理由.

3. 找一组数据作为总体，自行设定样本量，进行多次简单随机抽样. 观察样本量对估计总体平均数的影响，并试着解释其中的原因.

9.1.2　分层随机抽样

抽样调查最核心的问题是样本的代表性. 简单随机抽样是使总体中每一个个体都有相等的机会被抽中，但因为抽样的随机性，有可能会出现比较“极端”的样本. 例如，在对树人中学高一年级学生身高的调查中，可能出现样本中 50 个个体大部分来自高个子或矮个子的情形. 这种“极端”样本的平均数会大幅度地偏离总体平均数，从而使估计出现较大误差.

能否利用总体中的一些额外信息对抽样方法进行改进呢？

问题 3　在树人中学高一年级的 712 名学生中，男生有 326 名，女生有 386 名. 能否利用这个辅助信息改进简单随机抽样方法，减少“极端”样本的出现，从而提高对整个年级平均身高的估计效果呢？

我们知道，影响身高的因素有很多，性别是其中的一个主要因素. 高中男生的身高普遍高于女生的身高，而相同性别的身高差异相对较小. 我们可以利用性别和身高的这种关系，把高一年级学生分成男生和女生两个身高有明显差异的群体，对两个群体分别进行简单随机抽样，然后汇总作为总体的一个样本. 由于在男生和女生两个群体中都抽取了相应的个体，这样就能有效地避免“极端”样本.

思考

对男生、女生分别进行简单随机抽样，样本量在男生、女生中应如何分配？

自然地，为了使样本的结构与总体的分布相近，人数多的群体应多抽一些，人数少的群体应少抽一些. 因此，按男生、女生在全体学生中所占的比例进行分配是一种比较合理

的方式，即

$$\text{男生样本量}=\frac{\text{男生人数}}{\text{全体学生数}}\times\text{总样本量},$$

$$\text{女生样本量}=\frac{\text{女生人数}}{\text{全体学生数}}\times\text{总样本量}.$$

这样无论是男生还是女生，每个学生被抽到的概率都相等. 当总样本量为 50 时，可以计算出从男生、女生中分别应抽取的人数为

$$n_{\text{男}}=\frac{326}{712}\times 50\approx 23,$$

$$n_{\text{女}}=\frac{386}{712}\times 50\approx 27.$$

我们按上述方法抽取了一个容量为 50 的样本，其观测数据（单位：cm）如下：

男生

173.0 174.0 166.0 172.0 170.0 165.0 165.0 168.0 164.0 173.0
172.0 173.0 175.0 168.0 170.0 172.0 176.0 175.0 168.0 173.0
167.0 170.0 175.0

女生

163.0 164.0 161.0 157.0 162.0 165.0 158.0 155.0 164.0 162.5
154.0 154.0 164.0 149.0 159.0 161.0 170.0 171.0 155.0 148.0
172.0 162.5 158.0 155.5 157.0 163.0 172.0

通过计算，得出男生和女生身高的样本平均数分别为 170.6，160.6. 根据男生、女生身高的样本平均数以及他们各自的人数，可以估计总体平均数为

$$\frac{170.6\times 326+160.6\times 386}{712}\approx 165.2,$$

即估计树人中学高一年级学生的平均身高在 165.2 cm 左右.

上面我们按性别变量，把高一学生划分为男生、女生两个身高差异较小的子总体分别进行抽样，进而得到总体的估计. 一般地，按一个或多个变量把总体划分成若干个子总体，每个个体属于且仅属于一个子总体，在每个子总体中独立地进行简单随机抽样，再把所有子总体中抽取的样本合在一起作为总样本，这样的抽样方法称为**分层随机抽样**（stratified random sampling），每一个子总体称为**层**. 在分层随机抽样中，如果每层样本量都与层的大小成比例，那么称这种样本量的分配方式为**比例分配**.

在分层随机抽样中，如果层数分为 2 层，第 1 层和第 2 层包含的个体数分别为 M 和 N，抽取的样本量分别为 m 和 n. 我们用 X_1，X_2，…，X_M 表示第 1 层各个个体的变量值，用 x_1，x_2，…，x_m 表示第 1 层样本的各个个体的变量值；用 Y_1，Y_2，…，Y_N 表示第 2 层各个个体的变量值，用 y_1，y_2，…，y_n 表示第 2 层样本的各个个体的变量值，则

第 1 层的总体平均数和样本平均数分别为

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_M}{M}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i,\ \overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i.$$

第 2 层的总体平均数和样本平均数分别为

$$\overline{Y}=\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i,\ \overline{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

总体平均数和样本平均数分别为

$$\overline{W}=\frac{\sum_{i=1}^{M}X_i+\sum_{i=1}^{N}Y_i}{M+N},\ \overline{w}=\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i}{m+n}.$$

由于用第 1 层的样本平均数$\overline{x}$可以估计第 1 层的总体平均数$\overline{X}$，用第 2 层的样本平均数$\overline{y}$可以估计第 2 层的总体平均数$\overline{Y}$，因此我们可以用

$$\frac{M\times\overline{x}+N\times\overline{y}}{M+N}=\frac{M}{M+N}\overline{x}+\frac{N}{M+N}\overline{y}$$

估计总体平均数$\overline{W}$.

在比例分配的分层随机抽样中，

$$\frac{m}{M}=\frac{n}{N}=\frac{m+n}{M+N},$$

可得

$$\frac{M}{M+N}\overline{x}+\frac{N}{M+N}\overline{y}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}=\overline{w}.$$

因此，在比例分配的分层随机抽样中，我们可以直接用样本平均数$\overline{w}$估计总体平均数$\overline{W}$.

探究

与考察简单随机抽样估计效果类似，小明也想通过多次抽样考察一下分层随机抽样的估计效果. 他用比例分配的分层随机抽样方法，从高一年级的学生中抽取了 10 个样本量为 50 的样本，计算出样本平均数如表 9.1-2 所示. 与上一小节“探究”中相同样本量的简单随机抽样的结果比较，小明有了一个重要的发现. 你是否也有所发现？

表 9.1-2

	抽样序号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
男生样本的平均数	170.0	170.7	169.8	171.7	172.7	171.9	171.6	170.6	172.6	170.9
女生样本的平均数	162.2	160.3	159.7	158.1	161.1	158.4	159.7	160.0	160.6	160.2
总样本的平均数	165.8	165.1	164.3	164.3	166.4	164.6	165.2	164.9	166.1	165.1

我们把分层随机抽样的平均数与上一小节样本量为 50 的简单随机抽样的平均数用图形表示（图 9.1-4），其中红线表示整个年级学生身高的平均数.

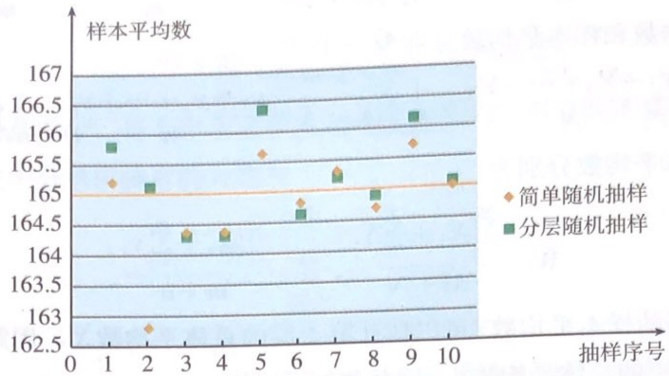


图 9.1-4

从试验结果看，分层随机抽样的样本平均数围绕总体平均数波动，与简单随机抽样的结果比较，分层随机抽样并没有明显优于简单随机抽样. 但相对而言，分层随机抽样的样本平均数波动幅度更均匀，简单随机抽样中出现了一个（第 2 个）偏离总体平均数的幅度比较大的样本平均数，即出现了比较“极端”的样本，而分层随机抽样没有出现.

实际上，在个体之间差异较大的情形下，只要选取的分层变量合适，使得各层间差异明显、层内差异不大，分层随机抽样的效果一般会好于简单随机抽样，也好于很多其他抽样方法. 分层随机抽样的组织实施也比简单随机抽样方便，而且除了能得到总体的估计外，还能得到每层的估计.

在实际抽样调查中，由于实际问题的复杂性，除了要考虑获得的样本的代表性，还要考虑调查实施中人力、物力、时间等因素，因此通常会把多种抽样方法组合起来使用. 例如，在分层抽样中，不同的层内除了用简单随机抽样外，还可以用其他的抽样方法，有时层内还需要再进行分层，等等.

探究

如果要了解某电视节目在你所在地区（城市、乡镇或村庄）的收视率，你能帮忙设计一个抽样方案吗？结合你所在地区的实际情况，和同学展开讨论.

练习

1. 数据 x_1，x_2，…，x_m 的平均数为$\overline{x}$，数据 y_1，y_2，…，y_n 的平均数为$\overline{y}$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i}{m+n}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}.$$

2. 有人说：“如果抽样方法设计得好，用样本进行视力调查与对 24 300 名学生进行视力普查的结果差不多. 而且对于想要掌握学生视力状况的教育部门来说，节省了人力、物力和财力，抽样调查更可